

# Алгоритмы симплектического интегрирования с переменным шагом для моделирования процессов происхождения и эволюции транснептуновых объектов

А.Б.Фетбройт

16 апреля 2002 года

## Аннотация

В этой работе проверяется теория Дробышевского о происхождении и эволюции транснептуновых объектов. Для интегрирования объектов использовался алгоритм симплектического интегрирования с переменным шагом. Этот алгоритм учитывает тесные сближения объектов.

## Введение

Сейчас существует много различных гипотез о формировании и эволюции Солнечной системы, например, классические теории Шмидта и Хойла. Для проверки этих гипотез необходимо интегрировать уравнения движения большого числа объектов на длительных интервалах времени. Я разработал специальный метод интегрирования и написал программу, которая будет исследовать динамическую эволюцию планетных систем и с помощью которой можно будет решать вопрос о том, как образовалась Солнечная система.

Относительно недавно появились симплектические методы интегрирования планетных систем. Эти методы сразу вышли на лидирующую позицию среди всех остальных, потому что они не используют явного вычисления интегралов численными методами. Поэтому при их реализации на компьютере будет тратиться намного меньше машинного времени. Так как симплектические методы не используют численного интегрирования, они являются более точными, поэтому не так быстро накапливаются ошибки.

Сейчас многие учёные пытаются получить модель образования массивных объектов за орбитой Нептуна, потому что исследования показывают, что именно оттуда приходят массивные объекты. Этот пояс астероидов — скопление массивных тел на расстоянии 50-100 астрономических единиц от

Солнца. Одной из наиболее интересных теорий образования транснептуновых объектов и эволюции Солнечной системы является теория Дробышевского. Согласно этой теории, на окраине Солнечной системы должно существовать скопление массивных объектов, которые образовались в результате распада протоЮпитера на более мелкие объекты. ПротоЮпитер отличается от Юпитера только массой, а элементы орбит у них совпадают:

$$m_{pj} = 0.1M_{\odot}, \quad (1)$$

где  $m_{pj}$  — масса протоЮпитера, а  $M_{\odot}$  — масса Солнца.

*Теория Дробышевского:*

Пусть в начальный момент времени мы имеем систему состоящую из Солнца и протоЮпитера. Предположим, что с начального момента времени эта система движется под действием сил взаимного притяжения и во время этого движения протоЮпитер отбрасывает объекты с псевдослучайными массами через псевдослучайные промежутки времени. Тогда в конечный момент времени начальная планетная система будет иметь на своей окраине скопление массивных тел, которые обычно называют транснептуновыми объектами. Эти объекты должны находиться на расстоянии приблизительно 50-100 астрономических единиц от Солнца.

ПротоЮпитер будет выбрасывать объекты до тех пор, пока его масса не станет равной  $0.001M_{\odot}$ . После того, как протоЮпитер перестанет выбрасывать объекты, он будет взаимодействовать с остальными телами до конечного момента времени. Объекты, которые выйдут на гиперболическую или параболическую траектории, будут исключены из системы и соответственно не будут участвовать во взаимодействии с другими объектами.

## 1 Модель профессора Дробышевского Е. М. о происхождении транснептуновых объектов

### 1.1 Масса протоЮпитера

Так как протоЮпитер в течение 10000 лет отбрасывает объекты, то его масса должна постепенно уменьшаться. В качестве механизма, описывающего потерю массы протоЮпитера, мы выбрали следующий закон[3]:

$$\frac{d \ln M}{dt} = -C, \quad (2)$$

где  $M$  — это масса протоЮпитера, а  $C$  — это зависящая от начальных и конечных условий.  $C$  характеризует процесс убывания массы.

Проинтегрируем выражение (2):

$$\int_{0.1}^M d \ln M = -C \int_0^t dt. \quad (3)$$

Найдём зависимость массы протоЮпитера от времени:

$$M = 0.1e^{-Ct}. \quad (4)$$

Нам не известна постоянная  $C$ , но её легко найти, так как мы знаем конечное условие:

$$M(10000) = 0.001. \quad (5)$$

Это конечное условие говорит о том, что протоЮпитер будет иметь  $0.001 M_{\odot}$ , когда пройдёт 10000 лет, так как по теории Дробышевского протоЮпитер должен отбрасывать объекты в течение 10000 лет со средней скоростью выброса 1 объект/год. Когда протоЮпитер перестанет выбрасывать объекты, он будет только взаимодействовать с выброшенными объектами на протяжении 1000000 лет.

Подставив конечное условие (5) в выражение (4), получаем:

$$C = \frac{\ln 100}{10000}. \quad (6)$$

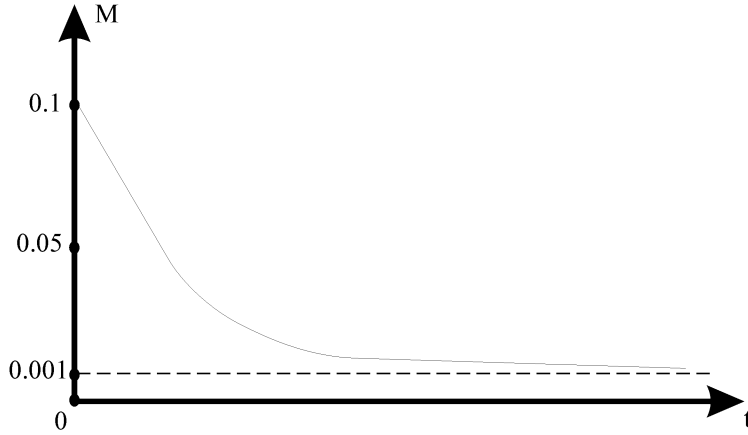


Рис. 1: Зависимость массы протоЮпитера от времени

Получили, что потери массы протоЮпитера от времени описываются следующим выражением:

$$M = 0.1e^{-\frac{\ln 100}{10000}t}, \quad (7)$$

то есть масса протоЮпитера экспоненциально убывает с течением времени.

## 1.2 Распределение масс отбрасываемых объектов

Все отбрасываемые объекты имеют определённые элементы орбит и массы. Элементы орбит находят из равномерного распределения на задаваемом интервале. Массы объектов не должны быть равномерно распределённой величиной, так как на практике тел с малыми массами должно быть

намного больше, чем тел с большими массами. Поэтому для определения масс отбрасываемых объектов больше всего подходит модифицированное распределение Вейбулла-Гнеденко.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \kappa \\ \gamma\alpha\lambda(x - \kappa)^{\alpha-1}e^{-\lambda(x-\kappa)^\alpha}, & \kappa < x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

Где  $\kappa$  — левый, а  $b$  — правый концы интервала, на котором задано распределение масс.  $\gamma$  — коэффициент нормировки, а  $\alpha$  и  $\lambda$  — параметры распределения, определяющие форму кривой распределения. Чтобы однозначно задать распределение, достаточно всего двух параметров:  $\alpha$  и  $x_{max}$ .  $x_{max}$  — это координата, при которой  $f(x)$  принимает максимальное значение. У распределения Вейбулла-Гнеденко всегда  $\alpha > 1$ .

$\gamma$  определяется из условия:

$$\int_{\kappa}^b f(x)dx = 1. \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{1 - e^{-\lambda(b-\kappa)^\alpha}} \quad (9)$$

Взяв производную от  $f(x)$  и приравняв её к нулю, а потом решив полученное уравнение относительно  $x$ , получим  $x_{max}$ :

$$x_{max} = \kappa + \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (10)$$

отсюда находится  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\alpha - 1}{\alpha(x_{max} - \kappa)^\alpha}. \quad (11)$$

Таким образом, задав  $\alpha$  и  $x_{max}$ , мы однозначно определили распределение масс, отбрасываемых объектов.

Чтобы найти значение массы выброшенного объекта, удовлетворяющее распределению Вейбулла-Гнеденко, необходимо проделать следующие операции с равномерно распределённой на отрезке  $(0, 1)$  величиной  $\xi$ :

$$\xi = F^{-1}(x), \quad (12)$$

где  $F(x)$  — это функция, которая получается из функции  $f(x)$  следующим образом:

$$F(x) = \int_{\kappa}^x f(x)dx. \quad (13)$$

Из выражения (12) очень просто определить переменную  $x$ , удовлетворяющую распределению Вейбулла-Гнеденко:

$$x = \kappa + \left(\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\gamma}{\gamma - \xi}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (14)$$

то есть, зная равномерно распределённую величину, мы очень просто сможем найти величину, распределённую по закону Вейбулла-Гнеденко.

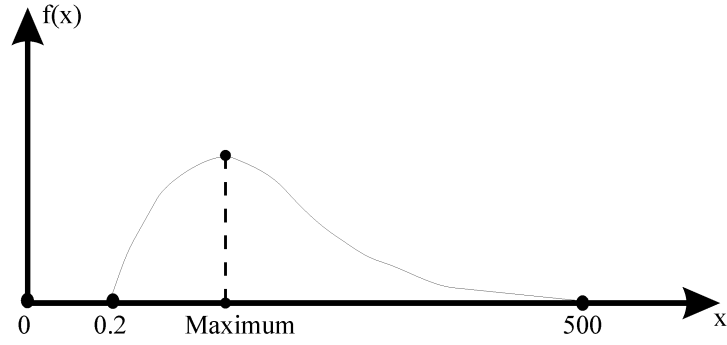


Рис. 2: Распределение масс отбрасываемых объектов

### 1.3 Начальные координаты и скорости отбрасываемых объектов

По теории Дробышевского выброшенные объекты должны начинать своё движение вблизи коллинеарной точки либрации  $L_1$ . Координаты и скорости отбрасываемых объектов легко найти по координатам и скоростям протоЮпитера:

$$\vec{r}_{obj} = \frac{1}{1+z} \vec{r}_{pj}, \vec{v}_{obj} = \frac{1}{1+z} \vec{v}_{pj}, \quad (15)$$

где  $\vec{r}_{obj}$  и  $\vec{v}_{obj}$  — начальное положение и скорость отброшенного протоЮпитером объекта, а  $\vec{r}_{pj}$  и  $\vec{v}_{pj}$  — положение и скорость протоЮпитера в момент выброса объекта.

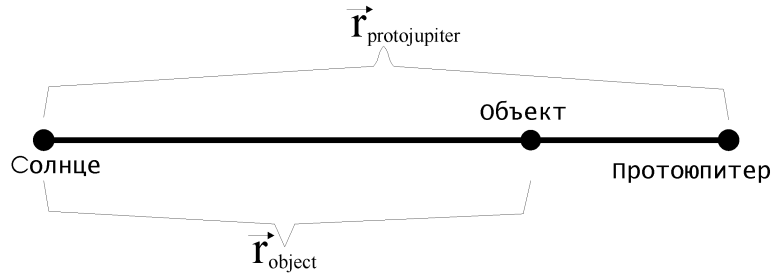


Рис. 3: Начальное положение каждого отброшенного протоЮпитером объекта

$\vec{r}_{obj}$  и  $\vec{r}_{pj}$  — расстояния от Солнца до объекта и от Солнца до протоЮпитера соответственно.  $z$  — постоянная величина, которая является отношением расстояния от объекта до протоЮпитера к расстоянию от Солнца до объекта. Чтобы определить координаты и скорости объекта, необходимо

знать  $z$ .  $z$  является решением следующего уравнения:

$$(M_{\odot} + m_{obj})z^5 + (3M_{\odot} + 2m_{obj})z^4 + (3M_{\odot} + m_{obj})z^3 - (m_{obj} + 3m_{pj})z^2 - (2m_{obj} + 3m_{pj})z - m_{obj} - m_{pj} = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) проще всего найти с помощью метода Ньютона. Последовательность коэффициентов этого уравнения имеет только одну переменную знака; уравнение имеет поэтому согласно теореме Декарта один и только один положительный корень. В качестве начального приближения можно взять решение уравнения (16) для случая, когда объект имеет нулевую массу:

$$z = \left(\frac{m_{pj}}{3M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (17)$$

## 2 Численный метод учёта взаимодействия большого числа массивных объектов

### 2.1 Гамильтониан планетной системы в координатах Якоби

Исходный гамильтониан системы в координатах Якоби выглядит следующим образом[1]:

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(p'_i)^2}{2m_i} - \sum_{i < j} \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (18)$$

Прибавим и отнимем выражение:  $-\frac{\gamma m_1 m_i}{r'_i}$ , тогда:

$$H_{kep} = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{(p'_i)^2}{2m_i} - \frac{\gamma m_1 m_i}{r'_i} \right), H_{int} = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma m_1 m_i \left( \frac{1}{r'_i} - \frac{1}{r_{i0}} \right) - \sum_{0 < i < j} \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (19)$$

где  $m_i$ ,  $m_j$  — массы объектов системы, а  $\gamma$  — гравитационная постоянная. Переменные со штрихом — параметры, относящиеся к системе координат Якоби, а без штриха — относящиеся к декартовой системе координат.

$$r'_i = \sqrt{(x'_i)^2 + (y'_i)^2 + (z'_i)^2}, r_{ij} = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2}. \quad (20)$$

Чтобы найти  $x'_j - x'_i$ , нужно преобразовать формулы перехода из одной системы координат в другую:

$$x'_j - x'_i = x_j - x_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k}{M_k} x_k. \quad (21)$$

Эта формула справедлива для всех  $i < j$ , а в координатах Якоби всегда  $i < j$ .

## 2.2 Зависимость временного шага от количества объектов, которые сохранились после времени выброса объектов

Проблема выбора шага по времени очень важна. Если шаг по времени слишком велик, то накопление ошибок интегрирования происходит очень быстро, поэтому интегрируемая задача будет иметь плохую точность. Если шаг по времени слишком мал, то точность интегрирования станет очень высокой, но интегрирование будет очень медленным. Шаг по времени должен быть таким, чтобы интегрирование протекало достаточно быстро и к тому же было точным.

Временные шаги изменяются следующим образом:

$$dt = \frac{ds}{H_{int}}, \quad (22)$$

где  $ds$  — виртуальный временной шаг, который является постоянным для некоторой конкретной системы тел.  $H_{int}$  изменяется на каждом шаге интегрирования, потому что  $H_{int}$  — функция, зависящая от координат, а координаты тел на каждом шаге интегрирования будут разными. То есть, чем больше  $H_{int}$  (расстояния между телами очень маленькие), тем меньше шаги по времени. И наоборот, чем меньше  $H_{int}$  (расстояния между телами очень большие), тем больше шаги по времени. Если количество тел в системе уменьшится (количество тел в системе может только уменьшаться, так как некоторые из тел могут выходить на параболические и гиперболические траектории), тогда изменится виртуальный временной шаг:

$$ds = ds_0 \frac{\sum_{i=2}^{m-1} m_i}{\sum_{i=2}^n m_i}, \quad (23)$$

где  $ds_0$  — это начальный виртуальный временной шаг, который определяется сразу после времени выброса объектов. Чтобы шаги по времени были рациональными,  $ds_0$  должно быть достаточно большим. Выберем в качестве  $ds_0$  виртуальный временной шаг в момент выброса самого последнего объекта. Так как все объекты выбрасываются вблизи точки либрации  $L_1$ , то расстояние между протоЮпитером и последним объектом примерно 0.3 астрономических единиц. Поэтому мы получаем  $ds_0$  очень большим и шаги по времени будут практически всегда большими, так как тела редко находятся на близких расстояниях друг от друга.  $ds_0$  вычисляется один раз. Сумма, стоящая в знаменателе, — это сумма масс всех отброшенных протоЮпитером объектов, которые пережили время выброса объектов. Всего таких объектов  $n$ . Эта сумма вычисляется тоже один раз. Сумма, стоящая в числителе, — это сумма масс всех объектов на текущий момент времени минус масса объекта, который вышел на параболическую или гиперболическую траекторию. Эта сумма вычисляется каждый раз, когда один из  $n$  объектов выбывает из интегрируемой системы тел. Формула (23) позволяет сохранять временной шаг постоянным при уменьшении количества тел в интегрируемой системе.

## 2.3 Сохранение величины гамильтониана $H'$

Согласно теории симплектических интеграторов, величина гамильтониана  $H'$  должна сохраняться с течением времени — это будет говорить о том, что ошибки интегрирования малы. Для объектов, рассмотренных в предыдущем параграфе, я построил зависимость погрешности гамильтониана  $\Delta H$  от времени.

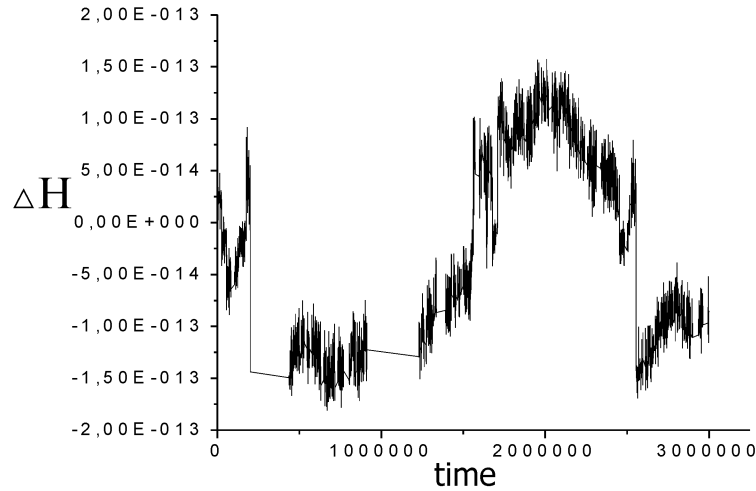


Рис. 4: Зависимость погрешности гамильтониана интегрируемой системы тел от времени

Согласно теории,  $\Delta H$  на всём интервале интегрирования должно равняться нулю, но на самом деле это не так, потому что компьютер накапливает ошибки при интегрировании. Если посмотреть на график, то видно, что погрешность интегрирования колеблется вблизи нуля. Минимальное значение  $\Delta H$  равно  $-1.8 * 10^{-13}$ , а максимальное  $1.6 * 10^{-13}$ . Погрешность гамильтониана значительно зависит от начального временного шага: чем больше начальный временной шаг, тем больше разброс  $\Delta H$ . Всё вышесказанное говорит о том, что интегрируемая задача имеет достаточно высокую точность.

## 3 Результаты

### 3.1 Интегрирование 10000 объектов

Интегрирование 10000 объектов проводилось с различными начальными временными шагами: 0.1, 1 и 10 дней. Результат интегрирования не зависел от начального временного шага, потому что конечные данные ока-



зались полностью идентичными при этих трёх временных шагах. При начальном временном шаге 100 дней полученные результаты отличались от результатов с временными шагами: 0.1, 1 и 10 дней. При любом из этих трёх временных шагов: 0.1, 1 и 10 дней, я получал один и тот же результат, но интегрирование происходит быстрее при шаге 10 дней, поэтому все дальнейшие интегрирования я проводил с начальным временным шагом 10 дней. Во всех интегрированиях я моделировал выброс протоЮпитером шести тяжёлых объектов. Первыми тремя объектами являлись: Сатурн, Уран и Нептун. Эти объекты имели массы, соответствующие массам планет, имена которых они носят. Начальные координаты и скорости у этих объектов соответствовали координатам и скоростям точки либрации  $L_1$  на текущий момент времени. Вторая тройка объектов дублировала первую. Каждый из этих шести объектов отбрасывался протоЮпитером через каждые 100 лет. Средняя масса отброшенного протоЮпитером объекта равняется 0.0000001 массы Солнца, то есть общая масса объектов приблизительно равна 0.0001 массы Солнца.

При вариации начальных скоростей выбрасываемых протоЮпитером объектов, было замечено, что объекты дольше не выходят из интегрируемой системы, если их начальная траектория лежит в плоскости, которая проходит через Солнце и протоЮпитер. Я проводил интегрирование системы с различными интервалами вариаций скоростей, но результат получал один и тот же. В конце интегрирования оставалось около 3-5 объектов, не считая Солнца и протоЮпитера.

Ниже показаны зависимости элементов орбит от времени. Интервалы вариаций скоростей для каждой координаты были от -0.00000001 до 0.00000001. После времени выброса объектов в интегрируемой системе осталось 16 тел. После окончания интегрирования в системе осталось всего 5 тел, причём из этих пяти тел одно было Солнцем, а другое протоЮпитером. В конце интегрирования большая полуось протоЮпитера стала равной 4.8 астрономическим единицам, то есть она уменьшилась на 0.4 астрономических единицы.

### 3.2 Интегрирование большего числа объектов

Я строил модель, аналогичную модели Дробышевского, но с различным количеством объектов, которые выбрасывает протоЮпитер. Вполне понятно, что при увеличении числа объектов модель Дробышевского не изменится, если мы нужным образом увеличим время выброса объектов. Были построены модели с 30000, 60000 и 100000 объектов. Так как число объектов увеличивалось, мне приходилось увеличивать время выброса объектов. Я увеличивал время выброса объектов пропорционально увеличению количества объектов.

При 30000 выброшенных объектов количество объектов, переживших интегрирование, осталось примерно таким же, как и для 10000 объектов. При 60000 выброшенных объектов количество объектов, переживших интегрирование, увеличивается примерно в два раза, то есть в конце остаётся около

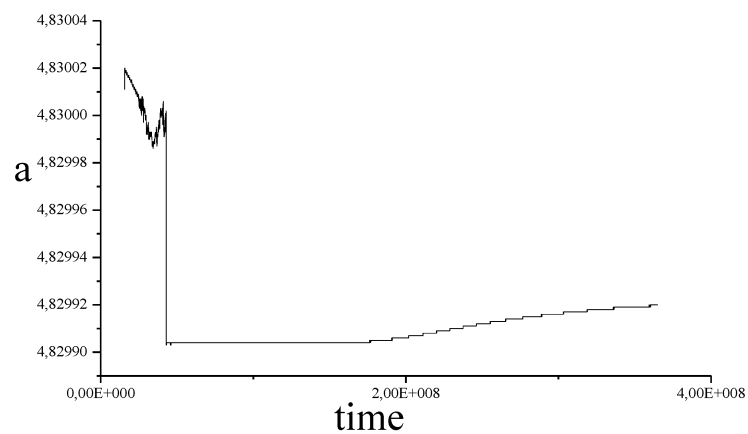


Рис. 5: Зависимость большой полуоси протоЮпитера от времени

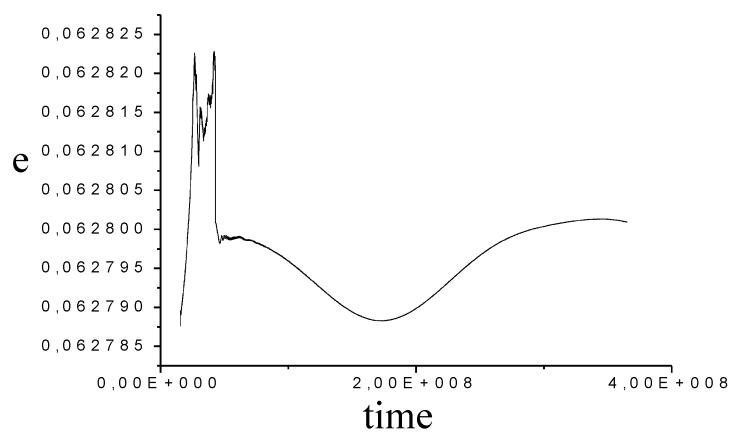


Рис. 6: Зависимость эксцентриситета протоЮпитера от времени

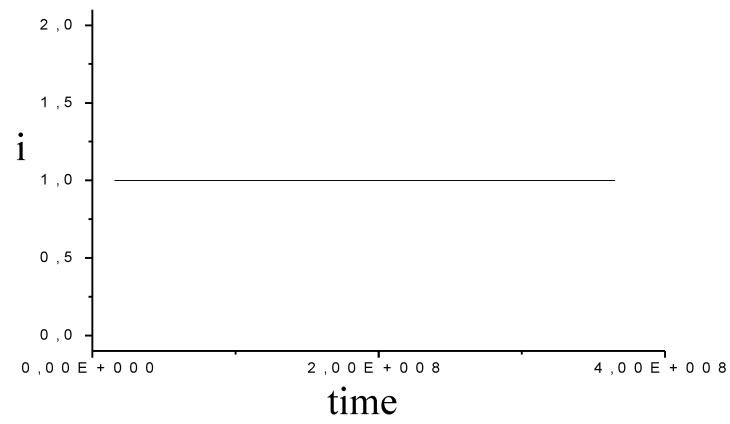


Рис. 7: Зависимость наклона протоЮпитера от времени

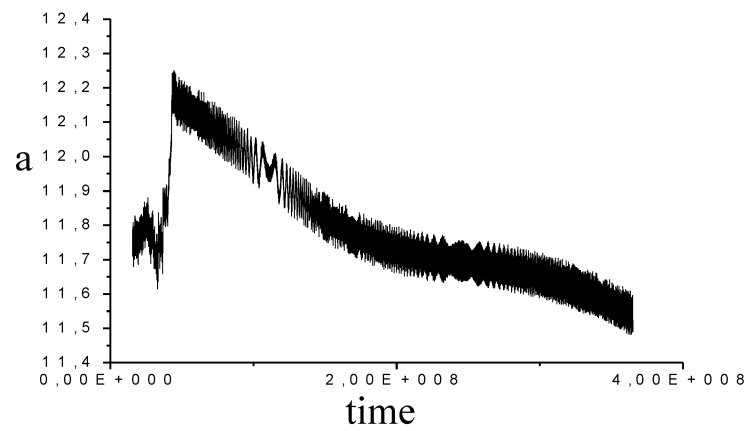


Рис. 8: Зависимость большой полуоси первого объекта от времени

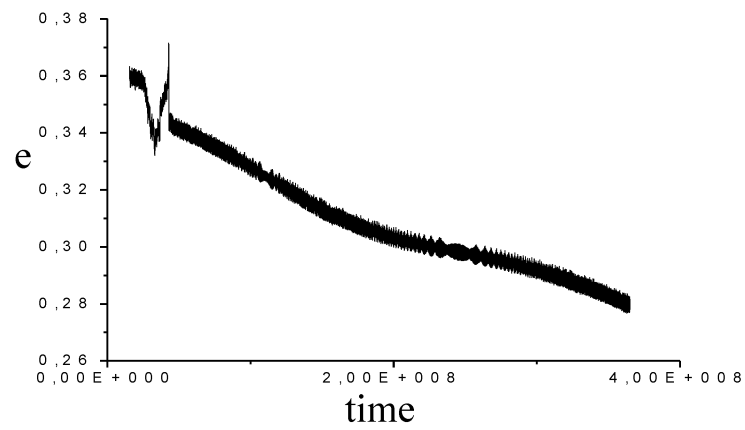


Рис. 9: Зависимость эксцентриситета первого объекта от времени

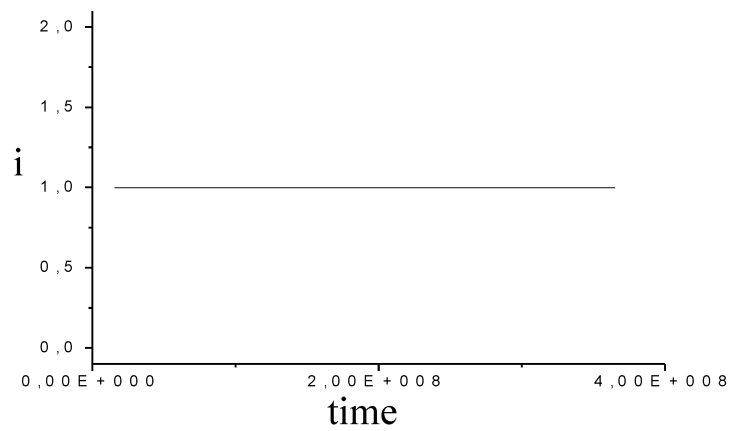


Рис. 10: Зависимость наклона первого объекта от времени

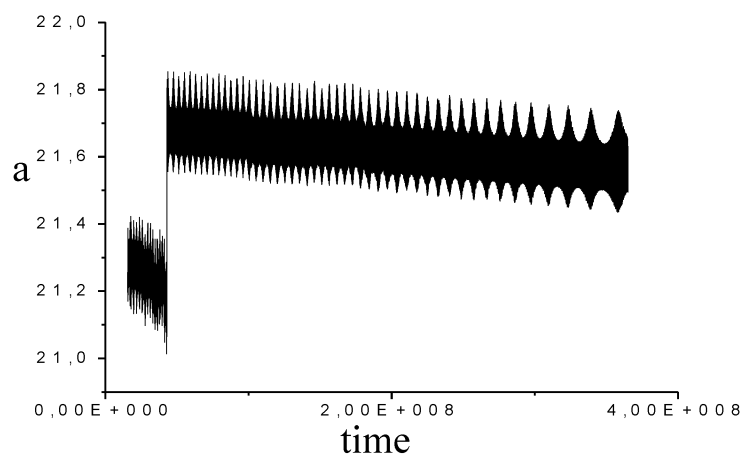


Рис. 11: Зависимость большой полуоси второго объекта от времени

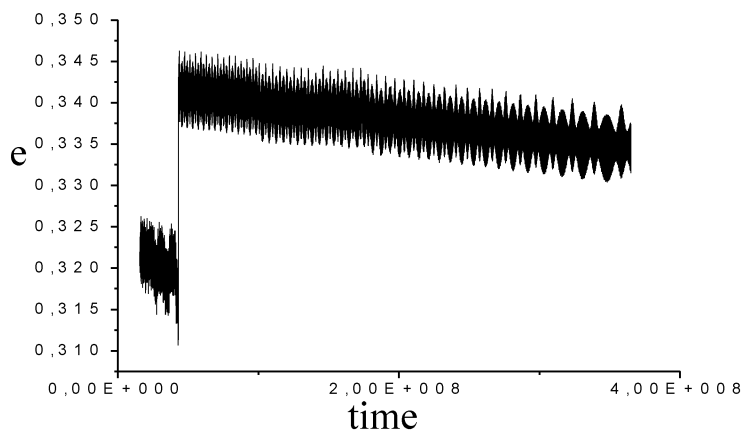


Рис. 12: Зависимость эксцентриситета второго объекта от времени

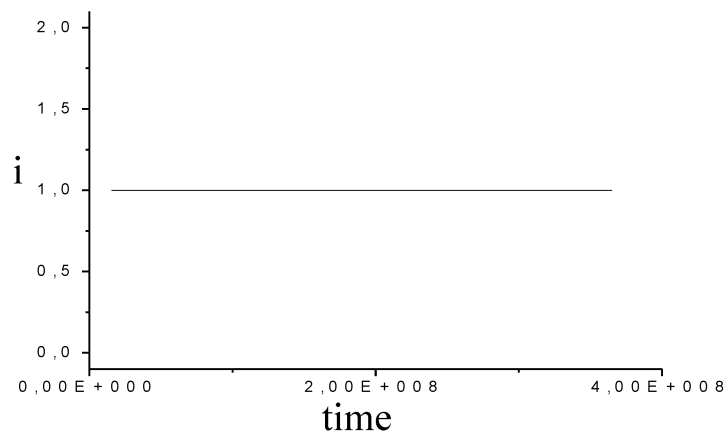


Рис. 13: Зависимость наклона второго объекта от времени

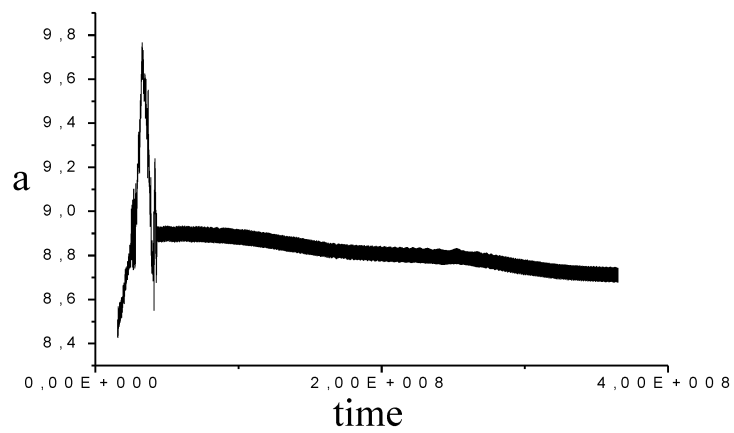


Рис. 14: Зависимость большой полуоси третьего объекта от времени

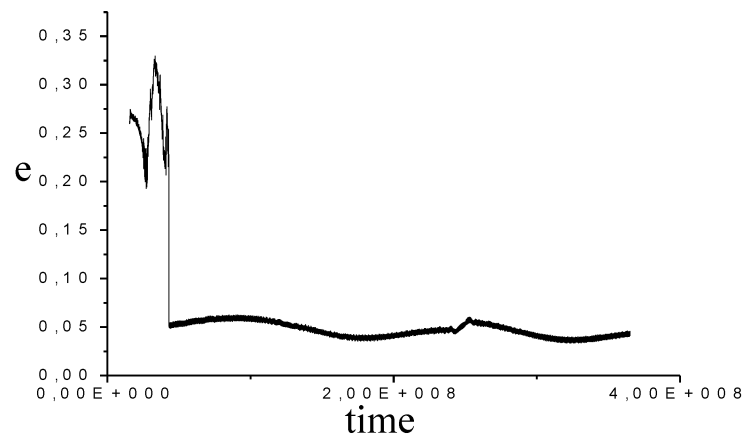


Рис. 15: Зависимость эксцентриситета третьего объекта от времени

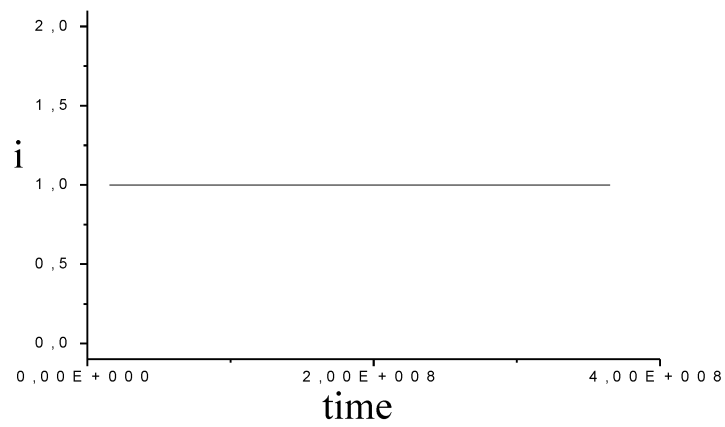


Рис. 16: Зависимость наклона третьего объекта от времени

5-7 объектов. Проинтегрировать 100000 объектов не получилось, потому что уже на десятой части времени выброса количество объектов составило 56, а из этого следует, что необходимо около 3-4 месяцев машинного времени. Интегрирование 10000 объектов с начальным временным шагом, равным 10 дням, требует два дня машинного времени. Качественно выброс 100000 объектов отличается от выброса 10000 объектов тем, что при выбросе 10000 объектов они стремятся покинуть Солнечную систему, а при выбросе 100000 объектов они группируются около Солнца. Это может быть связано с тем, что общая масса 100000 объектов приблизительно равна 0.001 массы Солнца, что соответствует массе Юпитера.

## Вывод

По теории Дробышевского, на расстоянии 100 астрономических единиц от Солнца должно находиться около 100 объектов, отброшенных протоЮпитером, причём траектории у этих объектов должны быть близкими к круговым. В моих моделированиях число оставшихся объектов никогда не превышало 5. Расстояние от Солнца до объекта у большинства из них лежало в интервале от 1 до 30 астрономических единиц. Были случаи, когда у некоторых объектов расстояние между ними и Солнцем было близким к 100 астрономическим единицам, а иногда даже доходило до 160 астрономических единиц, но у этих объектов были сильно вытянутые траектории движения, поэтому эти тела не являлись элементами пояса транснептуновых объектов, который хотел получить профессор Дробышевский.

Из всего вышеизложенного следует, что теория Дробышевского не нашла подтверждения. Но программа имеет множество входных параметров, и если попытаться найти нужную комбинацию значений этих параметров, то есть шанс подтвердить теорию Дробышевского.

## Литература

- [1] *J. Wisdom and M. Holman* Symplectic maps for the N-body problem. *Astronomical Journal*; 1991; с. 1528-1538
- [2] *J.E. Chambers* A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Astronomical Journal*; 1999; с. 793-799
- [3] *E. M. Drobyshevski* The origin of the solar system: implications for transneptunian planets and the nature of the long-period comets. *Earth, Planets and Moon*; 1977; с. 153-174
- [4] *V. V. Emel'yanenko* An explicit symplectic integrator for cometary orbits. *Celestial Mechanics and Dynamics Astronomy*; 2002; с. 1-13



# Содержание

<b>Введение</b>	<b>1</b>
<b>1 Модель Дробышевского о происхождении транснептуновых объектов</b>	<b>2</b>
1.1 Масса протоЮпитера . . . . .	2
1.2 Распределение масс отбрасываемых объектов . . . . .	3
1.3 Начальные координаты и скорости отбрасываемых объектов .	5
<b>2 Численный метод учёта взаимодействия большого числа массивных объектов</b>	<b>6</b>
2.1 Гамильтониан планетной системы в координатах Якоби . . .	6
2.2 Зависимость временного шага от количества объектов, которые сохранились после времени выброса объектов . . . . .	7
2.3 Сохранение величины гамильтониана $H'$ . . . . .	8
<b>3 Результаты</b>	<b>9</b>
3.1 Интегрирование 10000 объектов . . . . .	9
3.2 Интегрирование большого числа объектов . . . . .	9
<b>Вывод</b>	<b>16</b>